Modelos Matemáticos I
Examen II

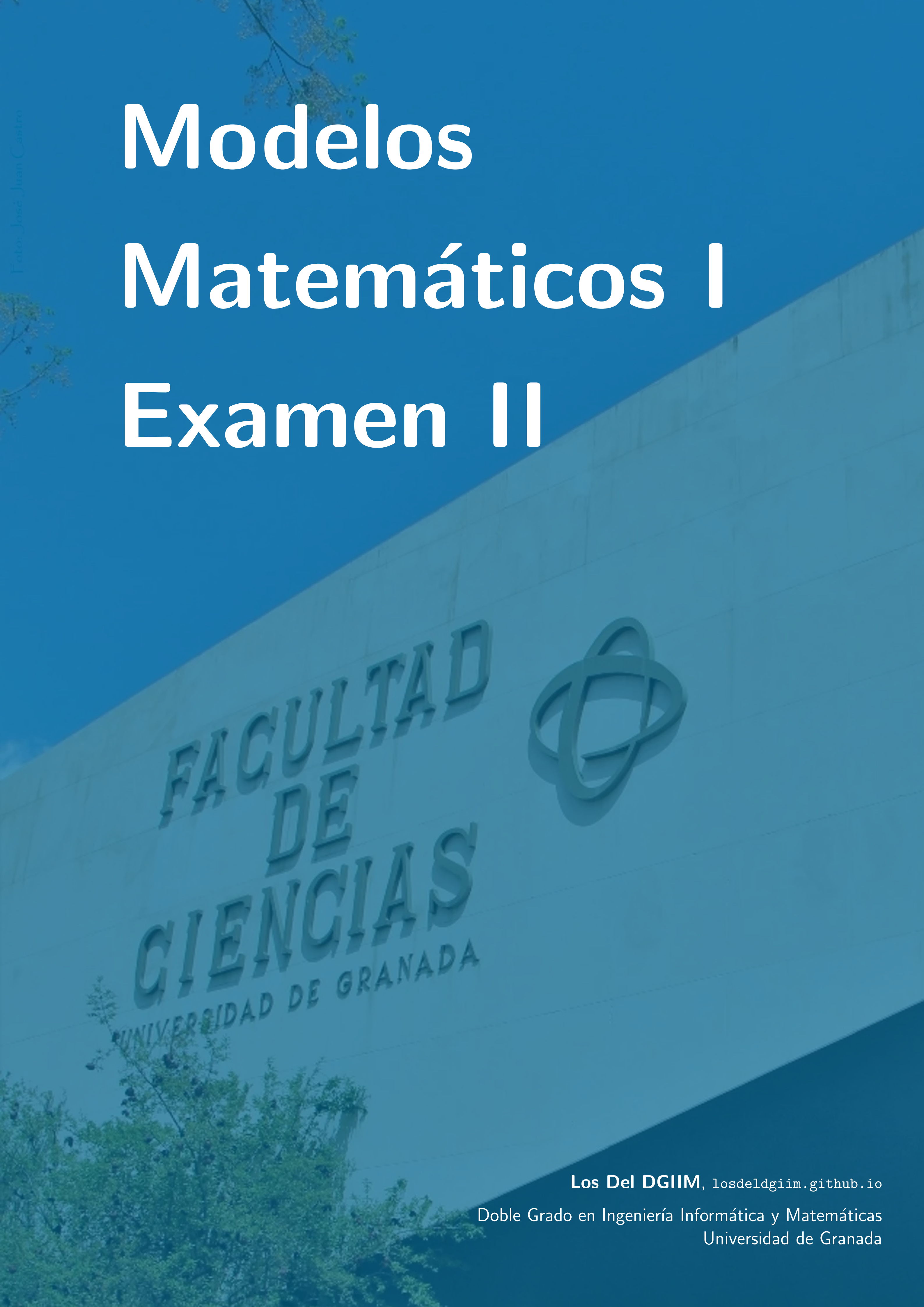

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Modelos Matemáticos I Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Modelos Matemáticos I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María José Cáceres Granados.

Descripción Prueba 2. Temas 2 y 3.

Fecha 28 de mayo de 2024.

Duración 90 minutos.

Ejercicio 1. Para valorar la eficacia de una vacuna contra un virus, se está estudiando la posibilidad de emplear una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

La incógnita x_n representa el número de virus una vez transcurridos n días desde la primera dosis de la vacuna. En los experimentos, se observa que:

- Si pasado un día desde la primera dosis de la vacuna el número de virus se ha dividido por tres, también se divide por tres en los días siguientes.
- Si pasado un día desde la primera dosis de la vacuna el número de virus se ha cuadruplicado, también se cuadruplica los días siguientes.

Suponiendo que la evolución del virus se describe con la ecuación dada, y teniendo en cuenta los resultados de los experimentos anteriores, se hace otra prueba y se observa que pasado un día desde la primera dosis de la vacuna, el número de virus es $x_1 = x_0/2$.

- *(1 punto)* ¿Cuántos virus habrá cada día?
- *(0.5 puntos)* ¿Qué ocurrirá con el virus a largo plazo? ¿Es efectiva la vacuna?

Ejercicio 2. Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} + x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \qquad a_0 \in \left]0, 1/4\right[,$$

así como una solución $\{x_n\}$ de la misma. Definimos $S_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$ la suma de los primeros $n+1$ términos de la sucesión. Se pide:

1. *(1 punto)* Determina la ecuación en diferencias satisfecha por $\{S_n\}$.
2. *(1.5 puntos)* ¿Qué relación hay entre el polinomio característico de la ecuación dada y el de la ecuación encontrada en el apartado anterior? Razona tu respuesta.
3. *(0.5 puntos)* ¿Es la sucesión $\{S_n\}$ convergente? Razona tu respuesta.

Ejercicio 3. De un sistema no lineal de ecuaciones en diferencias que describe la interacción entre tres especies (a las que llamaremos (x, y, z)) en distintos periodos de tiempo, se sabe que $P = (1, 0, 1)$ es un punto de equilibrio. También se conoce que la matriz jacobiana asociada al modelo viene dada por:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} x/3 + y & x - 1 & \alpha e^{1-z} \\ yz/\alpha & xz/\alpha & xy/\alpha \\ 0 & y/\alpha & -z/2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

1. *(0.5 puntos)* Encuentra de forma razonada una condición suficiente que garantice la estabilidad asintótica del punto de equilibrio P.

2. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{6} \cdot x_n^2 + x_n y_n - y_n - 2e^{1-z_n} + \dfrac{17}{6}, \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cdot x_n y_n z_n, \\ \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{4} \cdot y_n^2 - \dfrac{1}{4} \cdot z_n^2 + \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

   a) *(0.5 puntos)* ¿Responde este sistema a las condiciones expuestas en el enunciado del problema? En caso afirmativo, estudiar para qué valor(es) de α se tiene.

   b) *(0.5 puntos)* ¿Existe algún estado de equilibrio de dicho sistema que contemple la extinción simultánea de dos de las tres especies?

   c) *(1.5 puntos)* ¿Existe algún estado de equilibrio de dicho sistema, distinto de P, con $y = 0$? ¿Es estable?

3. *(0.5 puntos)* ¿Se puede determinar otro sistema distinto al anterior que responda a las condiciones expuestas en el enunciado del problema? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 4. *(2 puntos)* Se quiere emplear el sistema en diferencias $X_{n+1} = MX_n$ para estudiar la evolución de una población estructurada en tres estados: x, y, z. La matriz M es de probabilidad y X_n es el vector que describe la proporción de población correspondiente a cada estado:

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & b & 1/3 \\ a & c & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+, \qquad 0 \leqslant x_n, y_n, z_n \leqslant 1.$$

¿Pueden determinarse valores de a, b, c sabiendo que a largo plazo la proporción de población asociada al estado x es $5/11$? Justifica tu respuesta y, en caso afirmativo, calcúlalos.